Subject :
Year. Month. Date. ( )

فصل سوم : سری فوریه

هر سیگنالی را اگر متناوب باشد می‌توان برایش سری فوریه نوشت (به صورت مجموع

توابع سینوسی)

رابطه اویلر

$$\begin{cases} \sin \omega_0 t = \dfrac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \\ \cos \omega_0 t = \dfrac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \end{cases}$$

$e^{j\omega_0 t}$ ← سینوسی تک فرکانس

$-\omega_0 t$ و $\omega_0 t$ هرکدام یک فرکانس هستند.

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)}_{LTI} \longrightarrow y(t) = ?$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 (t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau =$$

$$H(\omega_0) e^{j\omega_0 t}$$

$H(\omega_0)$ ← پاسخ فرکانسی

عدد مختلطی که تابعی از فرکانس ω_0 است

Subject :
Year. Month. Date. ( )

اگر بطور کلی ورودی مان به صورت ترکیب خطی سینوسی با فرکانس های متناسب باشد یعنی:

$$x(t) = \underbrace{a_0 e^{j\omega_0 t}} + a_1 e^{j\omega_1 t} + \cdots$$

(به هر یک از این ها هارمونیک می گویند که باید فرکانس‌شان ضریبی از هم باشند)

$a_0, a_1, \ldots$ ← ضرایب هارمونیک اند

$$y(t) = a_0 H(\omega_0) e^{j\omega_0 t} + a_1 H(\omega_1) e^{j\omega_1 t} + \cdots$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{رابطه ترکیب}}$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T} \int_{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt \quad \text{رابطه تجزیه}}$$

انتگرال در یک پریود

ω_0 فرکانس اصلی سیگنال

T_0 پریود اصلی

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

مثال: ضرایب سری فوریه (a_k) را بدست آورید.

$x(t) = \sin\omega_0 t$ (دارای دو فرکانس ω_0 و $-\omega_0$ است)

$$\sin\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = \underbrace{\frac{1}{2j}}_{a_1} e^{j\omega_0 t} - \underbrace{\frac{1}{2j}}_{a_{-1}} e^{-j\omega_0 t}$$

رابطه اویلر

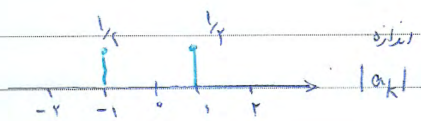
ما بقی ضرایب ها ضریب ها صفر هستند، یعنی در $\sin\omega_0 t$ دو تا فرکانس داریم

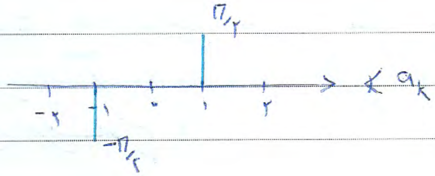
$a_1 = \frac{1}{2j}$ $a_{-1} = \frac{-1}{2j}$

نکته:
ضرایب سری فوریه (a_k) در حالت کلی عدد مختلط هستند.

یادآوری:

$$\begin{cases} z = a + jb \\ |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \measuredangle z = \tan^{-1} b/a \end{cases}$$





Subject :
Year. Month. Date. ( )

مثال :

$$x(t) = 1 + \sin\omega_0 t + \cos\omega_0 t + \cos(2\omega_0 t + \pi/4)$$

$$a_k = ?$$

$$x(t) = 1 + \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} + \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)t} + e^{-j(\;\;)}}{2} =$$

$$1 + \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} \rightarrow$$ ادامه

$$+ \tfrac{1}{2} e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)} = 1 + e^{j\omega_0 t}\overbrace{\left(\frac{1}{2j} + \frac{1}{2}\right)}^{a_1} + e^{-j\omega_0 t}\overbrace{\left(-\frac{1}{2j} + \tfrac{1}{2}\right)}^{a_{-1}}$$

$$+ e^{j(2\omega_0 t)}\overbrace{\left(\tfrac{1}{2} e^{\frac{\pi}{4}j}\right)}^{a_2} + e^{-j(2\omega_0 t)}\overbrace{\left(\tfrac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{4}j}\right)}^{a_{-2}}$$

$a_1 = \frac{1}{2j} + \frac{1}{2}$ ، $a_{-1} = \frac{-1}{2j} + \frac{1}{2}$ $\quad a_0 = 1$

$a_2 = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{4}j}$ ، $a_{-2} = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{4}j}$

نکته : a_0 درحقیقت سری فوریه مقدار dc سیگنال است که آن را به صورت

مثال تعریف می‌کنیم :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, dt$$

ادامه حل مثال بالا :

$a_{-2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2\right)$ ، $a_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2\right)$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

مثال :

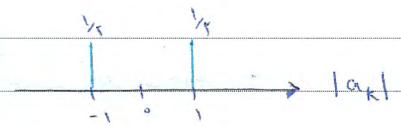
$x(t)$ پریودیک است با پریود 2π و ضرایب سری فوریه آن به صورت $a_0 = 1$

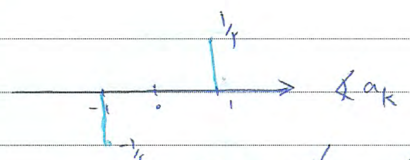
$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}$ ، $a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}$ و $a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$ حل سیگنال

$x(t)$ را بیابید .

اگر $x(t)$ حقیقی باشد ← اندازه ضرایب زوج هستند و فاز فرد

مثلاً در $\sin \omega_0 t$:





پس با این اوصاف $x(t)$ داده شده یک سیگنال حقیقی است .

$T = 2\pi \longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

پریود اصلی

سیگنال داده شده مقدار dc دارد $(a_0 = 1)$

با استفاده از رابطه ترکیب داریم :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}$$

MASCOMY

Subject :
Year. Month. Date. ( )

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{4} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\omega_0 t}$$

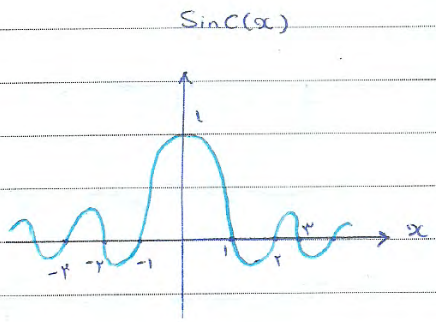
$$+ \frac{1}{3} e^{j3\omega_0 t} + \frac{1}{3} e^{-j3\omega_0 t} =$$

$$1 + \frac{1}{4}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}\right) + \frac{1}{3}\left(e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t}\right) =$$

$$\boxed{1 + \frac{1}{2}\cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t + \frac{2}{3}\cos 3\omega_0 t}$$

- تعریف تابع Sinc :

$$\mathrm{Sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$



$x = 0 \longrightarrow \mathrm{Sin}(0) = 1$

محل تقاطع با محور x : $\mathrm{Sinc}(x) = 0$

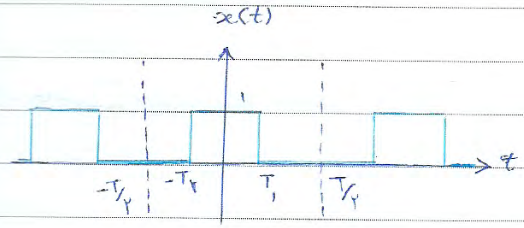
$$\pi x = k\pi \longrightarrow \boxed{x = k}$$

*

$$\frac{\sin \pi(\text{هرچیزی})}{\pi(\text{هرچیزی})} = \mathrm{Sinc}(\text{هرچیزی})$$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

مثال : ضرایب سری فوریه یک موج مربعی ؟



بدست $2T_1$ سیگنال on است دارای مقدار ۱ است .

$$* \ \alpha = 2T_1/T$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-j\omega_0 k t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega_0 k t}\, dt =$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega_0 k t}\, dt = \frac{1}{T(-j\omega_0 k t)}\, e^{-j\omega_0 k t}\Big|_{-T_1}^{T_1} =$$

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{-j\omega_0 k t}\left(e^{-j\omega_0 k T_1} - e^{j\omega_0 k T_1}\right) =$$

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2j\omega_0 k t}\left(+2j\sin\omega_0 k T_1\right) = \frac{1}{Tk\omega_0}\left(2\sin(\omega_0 k T_1)\right) =$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow \frac{2}{k2\pi}\sin k\left(\frac{2\pi}{T}T_1\right) = \frac{1}{k\pi}\sin k\Big(\overbrace{\frac{2T_1}{T}}^{*\alpha}\Big)\pi =$$

$$\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi\alpha) = \frac{\sin\pi(k\alpha)}{\frac{\pi}{\alpha}(k\alpha)} = \alpha\,\mathrm{Sinc}(k\alpha)$$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

- خواص سری فوریه :

۱- خاصیت خطی بودن سری فوریه

$$\begin{cases} x(t) \xleftrightarrow{F.S} a_k \\ y(t) \xleftrightarrow{F.S} b_k \end{cases}$$

$$Ax(t) + By(t) \longleftrightarrow Aa_k + Bb_k$$

۲- خاصیت شیفت زمانی

(شرط فاز پذیر سری نیز)

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F.S} \underline{e^{-jk\omega_0 t_0}}\, a_k$$

اثبات :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t-t_0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 (t-t_0)}$$

$$= \sum \underline{a_k e^{-jk\omega_0 t_0}}\, e^{jk\omega_0 t}$$

ضریب جدید برای $x(t-t_0)$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

۴- شیفت در ضرایب سری فوریه

$$x(t)\,e^{jM\omega_0 t} \longleftrightarrow a_{k-M}$$

۴- خاصیت تغییر مقیاس زمانی (یعنی ضرایب تغییر نکند فقط فرکانس به صورت $\alpha\omega_0$ می‌شود)

$$x(\alpha t) \longleftrightarrow a_k$$

با فرکانس $(\alpha\omega_0)$

۵- خاصیت مزدوج

اگر $x(t)$ سیگنال حقیقی باشد ضرایبش مزدوج هستند.

if $x(t)$ (real)

به شرط $x(t) = x^*(t)$ (مزدوج) $\qquad a_{-k} = a_k^*$

(a_k ها تقارن مزدوج دارند)

MASCOMY

Subject :
Year. Month. Date. ( )

نتیجه :
نتیجه خاصیت ۵

I) اگر $x(t)$ حقیقی و زوج باشد $\begin{cases} x(t) = x^*(t) \\ x(-t) = +x(t) \end{cases}$ ← ضرایب سری فوریه حقیقی و زوج می‌شوند.

II) اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد $\begin{cases} x(t) = x^*(t) \\ x(-t) = -x(t) \end{cases}$ ← ضرایب سری فوریه موهومی و خالص و فرد می‌شوند.

۶- خاصیت معکوس شدن زمان

$$x(-t) \longleftrightarrow a_{-k}$$

۷- خاصیت مشتق

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow (jk\omega_0)\, a_k$$

۸- خاصیت انتگرال

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \longleftrightarrow \frac{a_k}{jk\omega_0}$$

۹- ضرب

$$x(t) \cdot y(t) \longleftrightarrow a_k * b_k$$

MASCOMY

Subject :
Year. Month. Date. ( )

۱۰- کانولوشن

$$x(t) * y(t) \longleftrightarrow T a_k b_k$$

۱۱- رابطه ی پارسوال

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 \, dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

- همگرایی سری فوریه

$x(t) \longrightarrow a_k$ را بدست می آوریم

$$x_N(t) = \sum_{-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

حالا آیا $x_N(t)$ برابر $x(t)$ است یا خیر؟

جواب : بله $x(t) = \lim_{N \to \infty} x_N(t)$

در همگرایی $x(t)$ باید شرایط دیریکله را دارا باشد.

Subject :
Year. Month. Date. ( )

شرایط دیریکله:

۱- تعداد max و min های $x(t)$ در یک پریود محدود باشد.

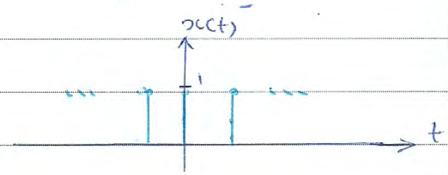
۲- " ناپیوستگی $x(t)$ در یک پریود باید محدود باشد.

۳- $x(t)$ باید مطلقاً انتگرال پذیر باشد

$$\underbrace{\int_T}_{\text{در یک پریود}} |x(t)|\, dt < \infty$$

مثال: ضرایب سری فوریه قطار ضربه پریودیک را بدست آورید؟

$$I(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$



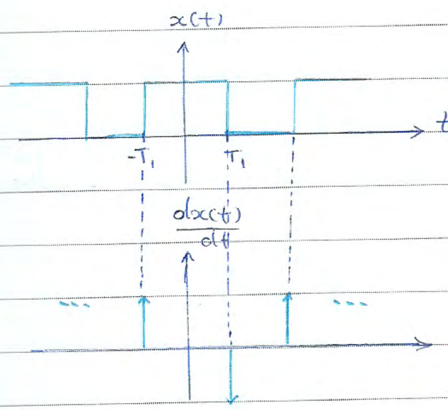
$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j\omega_0 k t}\, dt =$$

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, dt = 1/T}$$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

مثال : تبدیل فوریه موج مربعی را از روی ضرایب فوریه قطار ضربه بدست آورید.

از مثال قبل داریم ← ضرایب سری فوریه قطار ضربه $1/T$



از این موج مشتق میگیریم.

خواص :

$x(t) \longleftrightarrow a_k$

$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow (jk\omega_0)\, a_k$

$I(t) \longleftrightarrow 1/T$

$x(t-t_0) \longleftrightarrow (e^{-j\omega_0 k t_0})\, a_k$

$$\frac{dx(t)}{dt} = I(t+T_1) - I(t-T_1)$$

$$(jk\omega_0)a_k = I(t+T_1) - I(t-T_1)$$

$$(jk\omega_0)a_k = \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 T_1} - \frac{1}{T} e^{-jk\omega_0 T_1}$$

$$(jk\omega_0)a_k = \frac{1}{T}\left(2j \sin(k\omega_0 t)\right)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

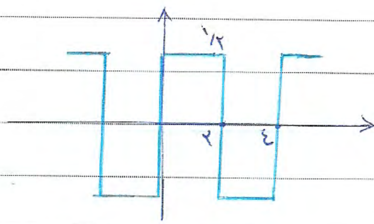
Subject :

Year. Month. Date. ( )

$$a_k = \frac{\frac{1}{T}\, 2\cancel{j}\, \mathrm{Sin}(k\omega_0 t)}{\cancel{j}\omega_0 k} = \frac{2\,\mathrm{Sin}(k\frac{2\pi}{T}t)}{T(\frac{2\pi}{T})k} = \dots =$$

$$\boxed{d\,\mathrm{Sinc}(kd)}$$

مثال : ضرایب سری فوریه موج زیر را بدست آورید ؟



$T = 4$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \pi/2}$$

موج را به موج مرجع تبدیل می‌کنیم

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = 0$$

$$y(t) = x(t) + 1/2 \longrightarrow y(t+1) = x(t+1) + 1/2$$

$$z(t) = y(t+1)$$

$$a_{k(z)} = d\,\mathrm{Sinc}(kd) = 1/2\,\mathrm{Sinc}(k/2)$$

$$\boxed{d = \frac{2T_1}{T} = \frac{2(1)}{4} = 1/2}$$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

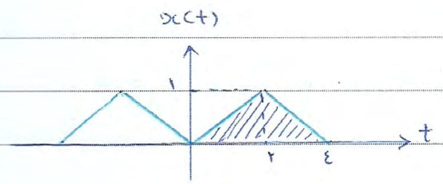
$z(t-1) = x(t) + \underbrace{\tfrac{1}{2}}$ $\qquad a_{k(x)} = e^{-j\omega_0 k} \, a_{k(z)} = e^{-j\omega_0 k}\left(\tfrac{1}{2} \operatorname{Sinc}\left(\tfrac{k}{2}\right)\right)$

فقط روی dc تأثیر دارد

* نکته: چون هر موج را روی محور بالا و پایین کنیم به آن مقدار dc می‌رسیم.

$$a_{k(x)} = \begin{cases} \tfrac{1}{2} e^{-jk\pi/2} \operatorname{Sinc}\left(\tfrac{k}{2}\right) & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

مثال ۳: ضرایب سری فوریه زیر را به دست آورید.

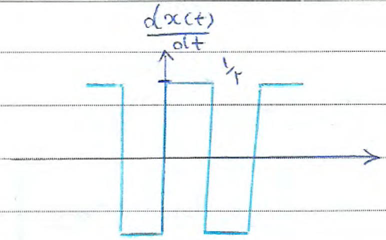


$T = 4 \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t)\, dt = \tfrac{1}{4} (4 \times 2) = \tfrac{1}{2}$$

از شکل موج بالا مشتق می‌گیریم

Subject :
Year. Month. Date. ( )



$$b_k = \frac{a_k\,(\text{مثال قبل})}{jk\omega_0} = \frac{\frac{1}{2} e^{-j\omega_0 k}\,\mathrm{Sinc}(k/2)}{j\omega_0 k}$$

مثال ؛ ۱- $x(t)$ حقیقی است .

۲- $x(t)$ با پریود $T=4$ و ضرایب سری فوریه a_k .

۳- $\forall |k|>1 \quad a_k = 0$.

۴- سیگنال دارای ضرایب سری فوریه $b_k = e^{-jk\pi/2}\, a_{-k}$ فرد است .

۵- $\frac{1}{4}\int |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2}$.

حل شود !!!

جواب
$$\begin{cases} x(t) = -\cos(\frac{\pi}{2}t) \\ x(t) = \cos(\frac{\pi}{2}t) \end{cases}$$

MASCOMY

Subject :
Year. Month. Date. ( )

سری فوریه سیگنال های گسسته در زمان :

در سیگنال های پیوسته در زمان تعداد هارمونیک ها بی نهایت است ولی در سیگنال های گسسته در زمان تعداد هارمونیک ها محدود است.

$$x[n] = \sum_{0}^{N-1} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$ رابطه ترکیب

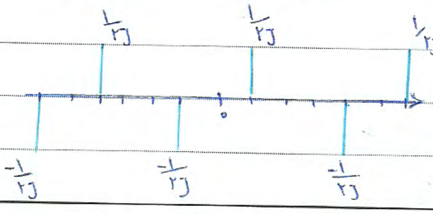
$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$ رابطه تجزیه

مثال: مطلوب است محاسبه و رسم ضرایب فوریه؟

$$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)n$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{5} \rightarrow N = 5$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)n = \frac{e^{j\frac{2\pi}{5}n} - e^{-j\frac{2\pi}{5}n}}{2j}$$ $a_1 = \frac{1}{2j}$ و $a_{-1} = \frac{-1}{2j}$



Subject :

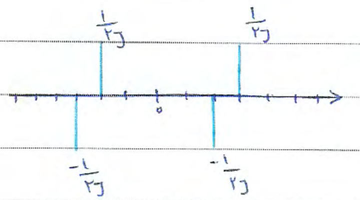
Year. Month. Date. ( )

مثال : مطلوب است محاسبه و رسم سری فوریه ؟

$$x[n] = \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)n$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{4\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} \times 2 \qquad \boxed{N = \tfrac{5}{2} \times 2 = 5}$$

$$\frac{e^{j\frac{2\pi}{5}\times 2n} - e^{-j\frac{2\pi}{5}\times 2n}}{2j} \rightarrow a_2 = \frac{1}{2j} \qquad a_{-2} = \frac{-1}{2j}$$



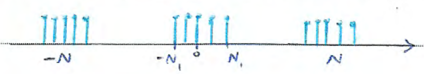
$a_k = a_{k \pm N}$

3 $\quad \frac{3+5}{8}$

-3 $\quad \frac{-3+5}{2}$

مثال : " " ؟

دوکان سرج نرجه



$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{-N_1}^{+N_1} 1 \times e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \dots =$$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\sin\frac{k\pi}{N}(2N+1)}{\sin\frac{k\pi}{N}}\right)$$

Subject :
Year. Month. Date. ( )

مثال: ۱- $x[n]$ با دوره تناوب ۶ پریودیک

۲- $\sum_{0}^{5} x[n] = 2$

۳- $\sum_{2}^{7} (-1)^n x[n] = 1$

۴- در بین تمام سیگنال‌هایی که سه شرط بالا را دارند $x[n]$ انرژی min دارد.

$$\boxed{\begin{gathered} x[n] = \sum_{n=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{سریال‌ها:} \\ a_k = \frac{1}{N}\sum x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \end{gathered}}$$

$N=6$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{6} = \pi/3$

$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{0}^{5} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{2}{6} = \boxed{1/3}$

$\sum_{2}^{7} e^{j\pi n} x[n]$

$e^{j\pi n} = e^{-j\pi n} \rightarrow e^{-j\frac{2\pi}{6}\times 3n}$

از طرفی $(-1) = e^{j\pi} = e^{-j\pi}$

Subject :

Year. Month. Date. ( )

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{2}^{7} e^{-j\frac{2\pi}{4}\times 3n}\, x[n] = \frac{1}{N}\times 1 = 1/4}$$

چون نقطه انرژی min ⟵ نتیجه ضرایب صفرند

پارسوال : $\frac{1}{N}\sum |x[n]|^2 = \sum |a_k|^2$

$$x[n] = \sum a_k e^{jk\frac{2\pi}{4}n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} e^{j\times 3\times\frac{2\pi}{4}n} =$$

$$\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}(-1)^n}$$

مثال : فرض کنید ضرایب سری فوریه ورودی یک سیستم LTI بدین صورت است

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = a_{-1} = 1/4 \\ a_2 = a_{-2} = 1/2 \\ a_3 = a_{-3} = 1/3 \end{cases}$$

و پاسخ ضربه آن $h(t) = e^{-t}u(t)$

خروجی را بدست آورید.